Домашнее задание на летние каникулы

Четность

1. Докажите, что уравнение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$ не имеет решений в нечетных натуральных числах.

2. На шахматной доске стоят 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Докажите, что число ладей, стоящих на черных полях, четно.

3. Можно ли расставить по окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя, и никакие две синие фишки не стояли рядом?

4. На прямой даны точки A и B, а также 1001 точка вне отрезка AB, которые покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма расстояний от A до красных точек, сложенная с суммой расстояний от B до синих точек, отлична от суммы расстояний от B до красных точек, сложенной с суммой расстояний от A до синих точек.

5. Есть 10 пар карточек, на которых написаны числа: 0, 0, 1, 1, ..., 8, 8, 9, 9. Докажите, что их нельзя выложить в ряд так, чтобы между любыми двумя карточками, на которых написаны одинаковые цифры n, лежало ровно n других карточек (n = 0, 1, ..., 9).

6. На окружности отмечено 20 точек, являющихся вершинами правильного 20-угольника, после чего они разбиты на 10 пар и в каждой паре точки соединены хордой. Докажите, что какие-то две хорды имеют одинаковую длину.

7. Квадрат размерами 6×6 покрыт без наложения доминошками размером 1×2. Докажите, что квадрат можно разрезать по вертикали или горизонтали, не повредив ни одной доминошки.

8. Улитка выползла из начала координат и поползла по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая каждые полчаса на 60°. Докажите, что вернуться в начало координат она может только за целое число часов.

9. Дано n магнитофонных лент, намотанных красными концами наружу и зелеными внутрь. При каких n можно их перемотать, пользуясь одной пустой катушкой так, чтобы они оказались на своих прежних местах зелеными концами наружу?

Принцип Дирихле

10. Прямая раскрашена в 11 цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на целом расстоянии.

11. На плоскости дано 7 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол, меньший 26°.

12. Каждая клетка прямоугольной таблицы 5×41 покрашена в белый или черный цвет. Докажите, что можно выбрать 3 столбца и 3 строки, все 9 клеток пересечения которых покрашены в один цвет.

13. Плоскость раскрашена в а) 2; б) 3; в) 100 цветов. Докажите, что найдется прямоугольник с вершинами одного цвета.

14. Шестеро друзей решили в воскресенье побывать в семи кинотеатрах, сеансы в которых начинаются в 9, 10, 11, ..., 19 часов. На каждый сеанс двое из них шли в один кинотеатр, остальные — в другой. Вечером выяснилось, что каждый из них посетил в этот день все семь кинотеатров. Докажите, что в каждом кинотеатре хотя бы на одном сеансе в этот день не был никто из друзей.

15. Какое наибольшее число пауков может находиться на ребрах куба, если паук терпит соседа на расстоянии, не меньшем а) 1 м; б) 1,1 м? Длина ребра куба — 1 м, расстояние измеряется вдоль ребер.

16. В каждом из двух одинаковых правильных 16-угольников отмечено по 7 вершин. Докажите, что можно так наложить эти многоугольники друг на друга, чтобы не менее 4 отмеченных вершин одного многоугольника совпали с отмеченными вершинами другого.

17. Докажите, что из любых 10 двузначных чисел можно выбрать две непересекающиеся группы с равными суммами.

18. На плоскости дано 25 точек. Известно, что из любых трех точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что среди данных точек найдутся 13, лежащие в круге радиуса 1.

19. В прямоугольнике 3×4 отмечено 6 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них не превосходит $\sqrt{5}$.

20. Множество A состоит из натуральных чисел, причем среди любых 100 идущих подряд натуральных чисел есть число из A. Докажите, что в A найдутся четыре различных числа a, b, c, d такие, что $a + b = c + d$.

21. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеток вырезали 99 квадратиков, каждый из которых состоит из 4 клеток. Докажите, что можно вырезать еще один такой же квадратик.

22. Клетчатый лист бумаги размером 10×10 покрыт 55 квадратиками, состоящими из 4 клеток. Докажите, что один из них можно убрать так, что оставшиеся будут по-прежнему покрывать всю доску.

23. Шахматист играет не менее одной партии в день и не более 12 за календарную неделю. Докажите, что в течение года найдутся несколько идущих подряд дней, за которые он сыграл ровно 20 партий.

24. На отрезке длины 10 несколько меньших непересекающихся отрезков покрашены в красный цвет, причем никакие две красные точки не находятся на расстоянии 1. Докажите, что сумма длин закрашенных отрезков не превосходит 5.

25. В квадрате 1×1 дана 101 точка. Докажите, что какие-то три из них лежат в вершинах треугольника площади не большей 0,01.

26. В квадрат 1×1 поместили несколько кругов, сумма радиусов которых равна $\frac{3}{5}$. Докажите, что есть прямая, параллельная стороне квадрата, которая пересекает не менее двух кругов.

27. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд так, что любой диаметр пересекает не более четырех из них. Докажите, что сумма длин хорд не превосходит 13.

28. На квадратном столе лежат 100 механических часов. Докажите, что в некоторый момент времени сумма расстояний от центра стола до центров часов будет меньше, чем сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок.

Игры

Во всех задачах этого раздела предполагается, что играют двое, и ходы делаются по очереди. Если явно не оговорено противное, требуется выяснить, кто побеждает: начинающий или его противник?

29. В каждом из первых (слева) трех полей полоски 1×20 стоит по фишке. За ход разрешается передвинуть любую фишку на произвольное свободное поле справа от нее, не перенося ее через другие фишки. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

30. В каждом из первых (слева) трех полей полоски 1×20 стоит по фишке. За ход разрешается либо передвинуть любую фишку в соседнюю справа клетку, если она не занята, либо, если эта клетка занята, но следующая за ней свободна, переставить фишку в эту свободную клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

31. На доске написано число 1234. Ход состоит в том, чтобы вычесть из числа какую-либо его ненулевую цифру, и написать полученное число вместо старого. Выигрывает тот, кто получит 0.

32. В ряд выписаны числа от 1 до 100. За ход разрешается вставить между любыми двумя числами один из знаков «+», «–», «×» (игроки сами выбирают, на какое из свободных мест поставить очередной знак). Начинающий выигрывает, если значение получившегося выражения нечетно, и проигрывает в противном случае.

33. В ряд выписаны числа 1, 2, 3, ..., 20, 21. За ход разрешается вычеркнуть любое из еще невычеркнутых чисел. Игра продолжается до тех пор, пока не останется два числа. Бели сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает начинающий, в противном случае — его соперник.

34. Дана доска размером а) 10×10; б) 9×9. За ход разрешается поставить в любую незанятую клетку крестик или нолик (игрок сам решает, что ставить). Выигравшим считается игрок, после хода которого на доске окажутся три одинаковых знака в ряд (по горизонтали, вертикали или диагонали).

35. На столе есть две кучки конфет: в первой — 22 конфеты, во второй — 23. За ход можно либо съесть две конфеты из одной кучки, либо переложить одну конфету из первой кучки во вторую. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

36. Начинающий пишет на доске одну из цифр 6, 7, 8, 9. Каждый следующий ход состоит в дописывании одной из этих цифр к уже имеющемуся числу. Игра заканчивается после а) 10-го; б) 12-го хода. Может ли начинающий добиться того, чтобы получившееся число не делилось на 9?

37. Двое играют в крестики-нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги. Начинающий ставит крестик в любую клетку. Каждым следующим ходом он должен ставить крестик в любую свободную клетку, соседнюю с одной из клеток, где уже стоит крестик; соседними называются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину. Второй играющий любым своим ходом может ставить сразу три нолика в любые три свободные клетки (не обязательно рядом с друг другом). Докажите, что как бы ни играл начинающий, второй игрок может его запереть: добиться того, чтобы начинающему некуда было поставить крестик.

38. В куче — 1001 спичка. За ход можно выкинуть из кучи спички в количестве p^n штук (где p — любое простое число, $n = 0, 1, 2, ...$). Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку.

39. Из доски торчит 1991 гвоздь. За ход разрешается соединить проводом любые два не соединенных еще гвоздя. Если в результате хода цепь замкнулась, то сделавший этот ход считается а) проигравшим; б) выигравшим.

40. Ход состоит в закрашивании одной или нескольких клеток, образующих квадрат, на доске размером а) 19×91; б) 19×92. Закрашивать клетки дважды запрещается. Выигрывает тот, кто закрашивает последнюю клетку.

41. Имеется лист клетчатой бумаги размером 30×45. За один ход производится разрез по линии, соединяющей два соседних узла сетки. Первый игрок начинает резать от края листа. Каждый следующий разрез должен продолжать линию, образованную предыдущими разрезами. Выигрывает игрок, после хода которого лист распадается на два куска.

42. Король за ход может поставить по крестику в любые две свободные клетки бесконечного листа бумаги. Министр за ход может поставить нолик в любую свободную клетку. Может ли король поставить 100 крестиков в ряд?

Задачи на конструкцию

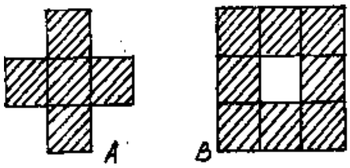
43. Путешественник прибыл в гостиницу, имея золотую цепочку из 7 звеньев. Хозяин требует с него плату за проживание — одно звено ежедневно. Какое минимальное число звеньев надо распилить путешественнику, чтобы каждый день платить хозяину гостиницы требуемое количество золота?

44. Можно ли выписать в ряд 10 чисел так, чтобы сумма любых пяти чисел подряд была бы положительна, а сумма любых семи подряд — отрицательна?

45. Найдите 10-значное число, первая цифра которого равна количеству нулей в записи этого числа, вторая цифра равна количеству единиц в записи и т.д., а десятая цифра равна количеству девяток в записи.

46. Али-Баба хочет проникнуть в Сезам. Перед входом в пещеру установлен барабан с 4 отверстиями, внутри каждого из которых находится кувшин с селедкой внутри. Селедка может лежать в кувшине либо хвостом вверх, либо хвостом вниз. Али-Баба может засунуть руки в любые два отверстия и, ощупав селедки, положить их там произвольным образом. После этого барабан приходит во вращение и, после того, как он остановится, Али-Баба не может определить, в какие отверстия он засовывал руки до этого. Сезам откроется в тот момент, когда все 4 селедки будут расположены одинаково. Как надо действовать Али-Бабе?

47. Как раскрасить лист клетчатой бумаги в 5 цветов так, чтобы внутри любой фигуры типа A (см. рис.) клетки были окрашены во все 5 цветов, а внутри любой фигуры типа B — не во все?



48. Нарисуйте фигуру, которой нельзя покрыть полукруг радиуса 1, но двумя экземплярами которой можно покрыть круг радиуса 1.

49. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы любые три из них лежали в вершинах равнобедренного треугольника.

50. Нарисуйте на плоскости 11 неперекрывающихся квадратов так, чтобы их нельзя было правильно раскрасить в 3 цвета. Правильной называется раскраска, при которой любые две фигуры, имеющие общую часть границы, окрашены в разные цвета.

51. Покройте плоскость неперекрывающимися квадратами, среди которых всего два одинаковых.

52. Постройте многоугольник и точку на плоскости такие, чтобы ни одна сторона многоугольника не была целиком видна из этой точки, если а) точка находится внутри многоугольника; б) точка находится вне многоугольника.

53. Отметьте на плоскости 7 точек таких, что среди любых трех из них найдутся две на расстоянии 1.

Геометрия

Геометрические неравенства

54. Докажите, что круги, основанные на двух сторонах треугольника, как на диаметрах, покрывают весь треугольник.

55. Докажите, что круги, основанные на сторонах выпуклого четырехугольника, как на диаметрах, покрывают весь четырехугольник.

56. Докажите, что у выпуклого многоугольника не может быть более трех острых углов.

57. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике сумма любых двух углов больше, чем разность любых двух других углов.

58. На плоскости дан круг радиуса 1 и пять прямых, пересекающих его. Про точку X известно, что она находится на расстоянии 11,1 от центра круга. Докажите, что если последовательно отразить точку X относительно всех пяти прямых, то полученная точка не может находиться внутри данного круга.

59. Астроном наблюдает 50 звезд, сумма попарных расстояний между которыми равна S. Набежавшее облако заслонило 25 звезд. Докажите, что сумма попарных расстояний между видимыми звездами меньше, чем $\dfrac{S}{2}$.

60. Квадрат 1×1 разрезан на несколько прямоугольников. Для каждого из них вычисляется отношение меньшей стороны к большей. Докажите, что сумма этих чисел не превосходит 1.

61. Вершины треугольника ABC находятся в узлах сетки листа клетчатой бумаги с длиной стороны клетки 1. Известно, что $AB > AC$. Докажите, что $AB - AC > \dfrac{1}{2p}$, где $2p$ — периметр треугольника ABC.

Комбинаторная геометрия

Комбинаторная геометрия изучает различные комбинаторные свойства расположений на плоскости (и в пространстве) геометрических фигур: точек, прямых, многоугольников и т.д. В этот же раздел обычно включают и изучение свойств выпуклости фигур.

62. На отрезке AB отмечено 200 точек так, что весь набор симметричен относительно середины отрезка. Сто точек покрашено в синий, а остальные — в красный цвет. Докажите, что сумма расстояний от A до красных точек равна сумме расстояний от B до синих точек.

63. На плоскости дано 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то четыре из них лежат в вершинах выпуклого четырехугольника.

64. Квадрат 2×2 разрезан на несколько прямоугольников. Докажите, что мы можем заштриховать несколько из них так, чтобы проекция заштрихованной фигуры на одну сторону квадрата имела длину не меньше 1, а на другую — не больше 1.

65. Шесть пятаков лежат на столе, образуя замкнутую цепочку. Седьмой пятак прокатывается по внешней стороне цепочки без скольжения, касаясь по очереди всех пятаков цепочки. Сколько оборотов он сделает, вернувшись в исходное положение?

66. В пространстве дана 8-звенная замкнутая ломаная, вершины которой совпадают с вершинами некоторого куба. Докажите, что одно из звеньев ломаной совпадает с ребром куба.

67. На прямой дано несколько отрезков, причем любые два из них пересекаются. Докажите, что есть точка, принадлежащая всем отрезкам.

68. Несколько отрезков покрывают отрезок [0; 1]. Докажите, что из них можно выбрать несколько непересекающихся отрезков, сумма длин которых не меньше $\frac{1}{2}$.

69. В отрезке находится несколько меньших отрезков, покрывающих его. Докажите, что левые половины этих отрезков покрывают не менее половины длины исходного отрезка.

Целые числа

70. Найдите все натуральные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

71. Число $\overline{abc}$ — простое, Докажите, что $b^2 - 4ac$ не является квадратом.

72. Четвертая степень некоторого натурального числа записывается цифрами 0, 1, 4, 6, 7, 9 в некотором порядке. Найдите это число.

73. Каково минимальное целое число вида 111…11, делящееся на 333…33 (100 троек)?

74. Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел найдется одно, сумма цифр которого делится на 11.

75. Существуют ли два различных семизначных числа, каждое из которых записано цифрами 1, 2, ..., 7 без повторений, таких, что одно из них делится на другое?

76. Разность чисел $\overline{abcdef}$ и $\overline{fdebca}$ делится на 271. Докажите, что $b = d$ и $c = e$.

77. Существуют ли двузначные числа, квадрат которых оканчивается на те же цифры, которыми записано исходное число, но в обратном порядке?

78. Целые числа A, B и C таковы, что $Ax^2 + Bx + C$ делится на 5 при любом целом x. Докажите, что A, B и C делятся на 5.

79. Найдите все натуральные n такие, что число $n^n + 1$ имеет не более 19 цифр и является простым.

80. Натуральное число y получено из числа x перестановкой цифр. Известно, что $x + y = 10^{200}$. Докажите, что x делится на 50.

81. Докажите, что число вида $\overline{a00...0b}$ не может быть точным квадратом.

Оптимизационные задачи

Принцип крайнего

Основной идеей решения задач этого цикла является рассмотрение самого «крайнего» в каком-либо смысле объекта: самого большого числа, пары наиболее удаленных точек, наименьшего угла и т.п.

82. а) В вершинах 100-угольника расставлены числа так, что каждое есть среднее арифметическое своих соседей. Докажите, что все эти числа равны между собой.

б) Докажите то же, если числа расставлены в клетках шахматной доски, причем каждое число не превосходит среднего арифметического своих соседей.

83. Докажите, что для любых 10 точек на плоскости найдутся пять непересекающихся отрезков, концы которых совпадают с данными точками.

84. Можно ли выбрать на плоскости несколько отрезков так, чтобы любая точка, являющаяся концом одного из них, лежала внутри какого-то другого отрезка?

85. Безрукий вор хочет столкнуть носом какую-нибудь монету со стола менялы, не задев ею других монет. Удастся ли ему это?

86. а) На столе лежат монеты одинакового радиуса. Докажите, что есть монета, касающаяся не более чем трех других монет.

б) В случае монет разных радиусов докажите, что есть монета, касающаяся не более чем пяти других.

87. В некотором государстве расположено несколько аэродромов, все расстояния между которыми различны. С каждого аэродрома взлетает самолет и летит на ближайший аэродром. Докажите, что на любом аэродроме приземлится не более пяти самолетов.

88. В космическом пространстве летает 1991 астероид, на каждом из которых сидит астроном, причем все расстояния между астероидами различны. Каждый астроном наблюдает за ближайшим астероидом. Докажите, что за одним из астероидов никто не наблюдает.

Полуинвариант

Идея «полуинварианта» естественным образом продолжает идею инварианта. Под полуинвариантом понимается величина, которая в процессе преобразований изменяется монотонно, т.е. увеличивается или уменьшается. Типичный пример полуинварианта: возраст человека, который может только увеличиваться с течением времени.

89. Сумасшедший путешественник едет из родного города A в самый удаленный от него город B. Затем оттуда он едет в самый удаленный от B город C, который оказывается отличным от A, и так далее. Докажите, что он никогда не вернется в A.

90. В ряд выложены 100 монет: герб, решка, герб, решка, ... За один ход разрешается перевернуть несколько подряд лежащих монет. За какое минимальное количество ходов можно добиться того, чтобы все монеты лежали гербом вверх?

91. В колонию из 1984 бактерий попадает вирус. Каждую секунду каждый вирус уничтожает одну бактерию, после чего все бактерии и все вирусы делятся надвое. Докажите, что рано или поздно все бактерии будут уничтожены, и выясните, в какой момент это произойдет?

92. В клетках прямоугольной таблицы расставлены действительные числа. Разрешается одним ходом сменить знак у всех чисел, стоящих в любой строке или в любом столбце. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы сумма чисел в таблице была неотрицательна.

93. В графе с n вершинами степень каждой вершины не превосходит пяти. Докажите, что вершины можно раскрасить в три цвета так, что ребер с одноцветными концами будет не более $\frac{n}{2}$.

94. По окружности расставлены действительные числа. Если четыре последовательно стоящих числа a, b, c и d таковы, что $(a-d)(b-c)>0$, то числа b и c разрешается поменять местами. Докажите, что такие перестановки мы сможем выполнять лишь конечное число раз.

Дискретная непрерывность

В этом параграфе собраны задачи, решение которых основано на очень простом соображении, которое можно наглядно продемонстрировать следующим образом. Пусть кузнечик прыгает по целым числам, каждый раз перепрыгивая на соседнее число. Тогда, если изначально он находился на отрицательном числе, а в конце — на положительном, то в какой-то момент кузнечик побывал в нуле.

95. На плоскости дано 100 точек. Докажите, что есть прямая, по обе стороны от которой лежит по 50 точек данного набора.

96. В ряд выложено 100 черных и 100 красных шаров, причем самый левый и самый правый шары — черные. Докажите, что можно выбрать слева подряд несколько шаров (но не все!) так, что среди них количество красных равно количеству синих.

97. Матч «Динамо» — «Шахтер» окончился со счетом 5:3. Докажите, что в матче был такой момент, когда «Динамо» оставалось забить столько мячей, сколько «Шахтер» уже забил к этому времени.

98. Докажите, что в шестизначном числе цифры можно переставить так, чтобы разность между суммой трех первых и трех последних цифр находилась бы в промежутке от 0 до 9.

99. В клетках доски 8×8 расставлены +1 и –1, причем так, что сумма всех чисел равна нулю. Докажите, что доску можно разрезать на два куска так, что сумма чисел в каждом из кусков равна нулю.

100. Грани восьми единичных кубиков окрашены в черный и белый цвета так, что черных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб 2×2×2, на поверхности которого черных и белых квадратиков поровну.

101. В некоторых клетках квадрата 50×50 стоят +1 и –1, причем модуль суммы всех чисел не больше 100. Докажите, что есть квадрат 25×25, модуль суммы чисел в котором не превосходит 25.

102. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} - a_n$ равно 0 или 1 при любом n. Известно, что $a_n = \dfrac{n}{1000}$ для некоторого n. Докажите, что $a_m = \dfrac{m}{500}$ для некоторого m.

Исследовательские задачи

В этом разделе собрано несколько «исследовательских» задач, суть которых состоит в последовательном решении цепочки нетрудных лемм, складывающихся в доказательство довольно непростой теоремы.

103. Правильный треугольник на клетчатой бумаге.

а) Докажите, что у всякого треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги удвоенная площадь есть целое число.

б) Вычислите высоту равностороннего треугольника со стороной a и найдите его площадь.

в) Докажите, что квадрат длины отрезка с вершинами в узлах клетчатой бумаги — целое число.

г) Докажите, что если существует равносторонний треугольник с вершинами в узлах, то $\sqrt{3}$ является отношением двух натуральных чисел.

д) Докажите, что если квадрат несократимой дроби — целое число, то знаменатель этой дроби равен единице.

е) Докажите, что нельзя расположить равносторонний треугольник на клетчатой бумаге так, чтобы его вершины лежали в узлах.

104. *Формула Пика.* Докажите, что площадь некоторого многоугольника, вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги, равна $a+\frac{b}{2}-1$, где a — число узлов, лежащих внутри многоугольника, b — число узлов на его сторонах.

а) Проверьте формулу Пика для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки.

б) Проверьте формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки.

в) Докажите формулу Пика для многоугольника, составленного из двух многоугольников, для которых формула Пика уже доказана.

г) Пусть многоугольник, для которого формула Пика уже проверена, составлен из двух многоугольников. Докажите, что если формула Пика выполняется для одного из этих двух многоугольников, то она выполняется и для другого.

д) Докажите, что для любого треугольника с вершинами в узлах сетки формула Пика верна.

е) Докажите, что любой многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники (с помощью индукции).

ж) Докажите формулу Пика в общем случае.

105. *Теорема Бойяи-Гервина.* Докажите, что любые два равновеликих многоугольника равносоставлены, т.е. один из них можно разбить на части, из которых можно составить другой.

а) Докажите, что параллелограммы с общим основанием и равными высотами равносоставлены.

б) Докажите, что если многоугольники P_1 и P_2 равносоставлены, а также равносоставлены многоугольники P_2 и P_3, то и многоугольники P_1 и P_3 равносоставлены.

в) Докажите, что два равновеликих параллелограмма равносоставлены.

г) Докажите, что любой треугольник равносоставлен с некоторым параллелограммом.

д) Докажите, что любой треугольник равносоставлен с прямоугольником, одна из сторон которого имеет длину 1.

е) Докажите теорему Бойяи-Гервинаaa

106. *Делимость чисел Фибоначчи.*

а) Докажите для любых натуральных m и n индукцией по n формулу $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$.

б) Докажите, что F_{km} делится на F_m (индукцией по k).

в) Докажите, что если n делится на $m > 2$, то F_n — составное.

г) Докажите, что у любого составного числа, не равного 4, есть собственный делитель, больший 2.

д) Докажите, что если число F_n — простое, то либо $n = 4$, либо n — простое число.

107. *Теорема Хелли.* На плоскости дано несколько выпуклых множеств, любые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все эти множества имеют общую точку.

а) На плоскости отмечено четыре точки, помеченные наборами цифр 123, 124, 234 и 134. Разрешается соединять любые две точки, помеченные какими-либо цифрами, и помечать все точки этого отрезка всеми цифрами, которыми одновременно помечены оба его конца. Докажите, что так можно построить точку, которая будет помечена всеми четырьмя цифрами.

б) Докажите, что пересечение выпуклых множеств выпукло.

в) Докажите теорему Хелли для четырех множеств A_1, A_2, A_3 и A_4: помните, что у любых трех из них есть общая точка.

г) Докажите теорему Хелли в общем случае индукцией по количеству выпуклых множеств.