

40. В деревне у прямой дороги с интервалами в 50 м стоят четыре избы A , B , C и D . В какой точке дороги надо построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до изб была наименьшей?

41. Даны точки A и B . Где на прямой AB расположены точки, расстояние от которых до точки B больше, чем до точки A ?

42. Имеется угольник с углом в 19° . Как построить с его помощью угол в 1° ?

43. В полдень минутная и часовая стрелки совпали. Когда они совпадут в следующий раз?

44. Из точки O на плоскости выходят четыре луча, следующие друг за другом по часовой стрелке: OA , OB , OC и OD (рис. 2). Известно, что сумма углов AOB и COD равна 180° . Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.

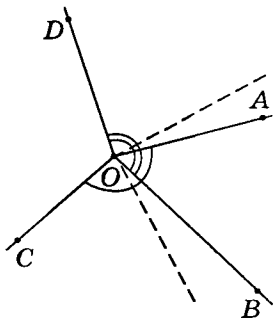


Рис. 2

45. Даны точки A и B . Для каждой точки M , не совпадающей с точкой B и лежащей на прямой AB , рассмотрим отношение $AM : BM$. Где расположены точки, для которых это отношение: а) больше 2; б) меньше 2?

46. Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки совпадают? образуют развернутый угол? образуют прямой угол?

47. В деревне A живет 100 школьников, в деревне B живет 50 школьни-

ков. Расстояние между деревнями 3 км. В какой точке дороги из A в B надо построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было как можно меньше?

48. На прямой выбрали четыре точки A , B , C , D и измерили расстояния AB , AC , AD , BC , BD и CD . Могут ли они быть равными (в порядке возрастания): а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; б) 1; 1; 1; 2; 2; 4?

2. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

49°. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов этого отрезка.

50. Докажите, что биссектриса угла есть геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон.

51. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

52. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

53. Докажите, что около любого треугольника можно описать окружность, и притом единственную.

54. Через точку, не лежащую на данной прямой, проведите с помощью циркуля и линейки прямую, параллельную данной.

55°. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

56. Катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы. Докажите, что угол, противолежащий этому катету, равен 30° .

57°. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O . Докажите равенство треугольников BAO и DCO , если известно, что $\angle BAO = \angle DCO$ и $AO = OC$.

58. Докажите, что у равнобедренного треугольника высота, опущенная на основание, является медианой и биссектрисой.

59. Треугольники ABC и ABC_1 — равнобедренные с общим основанием AB . Докажите равенство треугольников ACC_1 и BCC_1 .

60. Два отрезка AB и CD пересекаются в точке O , которая является серединой каждого из них. Докажите равенство треугольников ACD и BDC .

61. Медиана треугольника делит пополам его периметр. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

62. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O , которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD , если отрезок $AC = 10$?

63. На основании AB равнобедренного треугольника ABC даны точки A_1 и B_1 . Известно, что $AB_1 = BA_1$. Докажите, что треугольник AB_1C равен треугольнику BA_1C .

64. На стороне AB треугольника ABC взята точка D , а на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка D_1 . Известно, что треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны и отрезки DB и D_1B_1 также равны. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

65. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O . Докажите равенство треугольников ACO и DBO , если известно, что $\angle ACO = \angle DBO$ и $BO = OC$.

66. Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$:

а) медианы, проведенные из вершин A и A_1 , равны;

б) биссектрисы, проведенные из вершин A и A_1 , равны.

67. Треугольники ACC_1 и BCC_1 на рис. 3 равны. Их вершины A и B лежат по разные стороны от прямой CC_1 . Докажите, что треугольники ABC и ABC_1 — равнобедренные.

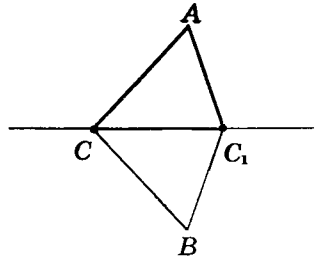


Рис. 3

68. Докажите признак равенства треугольников по углу, биссектрисе этого угла и стороне, прилежащей к этому углу.

69. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

70. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BM . На ней взята точка D . Докажите равенство треугольников: а) ABD и CBD ; б) AMD и CMD .

71. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если у него:

а) медиана BD является высотой;

б) высота BD является биссектрисой.

72. Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, противоположной основанию, является медианой и высотой.

73. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

74. На сторонах AB , BC и CA равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AD , BE и CF . Точки D , E и F соединены отрезками. Дока-

жите, что треугольник DEF — равно-
сторонний.

75. Отрезки AB и CD пересекаются
под прямым углом и $AC = AD$. Докажи-
те, что $BC = BD$ и $\angle ACB = \angle ADB$.

76. Даны два треугольника: ABC и
 $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB = A_1B_1$, $AC =$
 $= A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AC и
 BC треугольника ABC взяты соответ-
ственно точки K и L , а на сторонах
 A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ —
точки K_1 и L_1 , так что $AK = A_1K_1$, $LC =$
 $= L_1C_1$. Докажите, что $KL = K_1L_1$ и
 $AL = A_1L_1$.

77. В равнобедренном треугольнике
 ABC с основанием AC и углом при
вершине B , равным 36° , проведена
биссектриса AD . Докажите, что тре-
угольники CDA и ADB — равнобедрен-
ные.

78. В равнобедренном треугольнике
 ABC с основанием AC , равным 37 ,
внешний угол при вершине B равен
 60° . Найдите расстояние от вершины C
до прямой AB .

79°. На сторонах BC и B_1C_1 равных
треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ взяты со-
ответственно точки M и M_1 , причем
 $BM : MC = B_1M_1 : M_1C_1$. Докажите,
что $AM = A_1M_1$.

80. Внешние углы треугольника
 ABC при вершинах A и C равны 115° и
 140° . Прямая, параллельная прямой
 AC , пересекает стороны AB и AC в точ-
ках M и N . Найдите углы треугольни-
ка BMN .

81. От вершины C равнобедренного
треугольника ABC с основанием AB
отложены равные отрезки: CA_1 на сто-
роне CA и CB_1 на стороне CB . Докажи-
те равенство треугольников: 1) CAB_1 и
 CBA_1 ; 2) ABB_1 и $BA A_1$.

82. На сторонах AC и BC треуголь-
ника ABC взяты точки C_1 и C_2 . Дока-
жите, что треугольник ABC равнобед-
ренный, если треугольники ABC_1 и
 BAC_2 равны.

83°. Докажите, что у равнобедрен-
ного треугольника:

а) биссектрисы, проведенные из
вершин при основании, равны;

б) медианы, проведенные из тех же
вершин, также равны.

84°. Точки A, B, C, D лежат на од-
ной прямой. Докажите, что если тре-
угольники ABE_1 и ABE_2 равны, то тре-
угольники CDE_1 и CDE_2 также равны.

85. Отрезки AB и CD пересекаются.
Докажите, что если отрезки $AC, CB,$
 BD и AD равны, то луч AB является
биссектрисой угла CAD , луч CD — бис-
сектрисой угла ACB , а CD перпендику-
лярно AB .

86. Треугольники ABC и BAD рав-
ны, причем точки C и D лежат по раз-
ные стороны от прямой AB (рис. 4).
Докажите, что:

а) треугольники CBD и DAC равны;

б) прямая CD делит отрезок AB по-
полам.

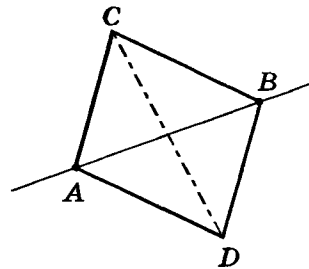


Рис. 4

87°. Равные отрезки AB и CD пере-
секаются в точке O так, что $AO = OD$.
Докажите равенство треугольников
 ABC и DCB .

88. Найдите углы треугольника,
если известно, что его стороны лежат
на прямых, углы между которыми
равны $20^\circ, 30^\circ$ и 50° .

89. В треугольнике проведены две
высоты. Докажите, что если их отрез-
ки от точки пересечения до вершин
равны, то треугольник равнобедрен-
ный.

90. В треугольнике ABC проведены биссектрисы из вершин A и B . Точка их пересечения обозначена через D . Найдите угол ADB , если:

- 1) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 100^\circ$;
- 2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$;
- 3) $\angle C = 130^\circ$;
- 4) $\angle C = \gamma$.

91. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC ; CD — биссектриса угла C ; $\angle ADC = 150^\circ$. Найдите угол B .

92. В треугольнике известны величины углов A , B , C . Найдите углы шести треугольников, на которые данный треугольник разбивается его биссектрисами.

93°. Биссектрисы двух углов треугольника пересекаются под углом 70° . Найдите третий угол треугольника.

94. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AC . Образовавшиеся при этом три угла с вершиной B относятся как $3 : 10 : 5$. Найдите углы треугольника ABC .

95. Через точку M , лежащую внутри угла с вершиной A , проведены прямые, параллельные сторонам угла и пересекающие эти стороны в точках B и C . Известно, что $\angle ACB = 50^\circ$, а угол, смежный с углом ACM , равен 40° . Найдите углы треугольников BCM и ABC .

96. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M . При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .

97. Точки A , B , C , D лежат на одной прямой, причем отрезки AB и CD имеют общую середину. Докажите, что если треугольник ABE равнобедренный с основанием AB , то треугольник CDE также равнобедренный с основанием CD .

98. Докажите равенство треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и углам, которые образует медиана с этой стороной.

99. Докажите равенство треугольников по стороне и высотам, опущенным на две другие стороны.

100. Докажите, что если высота треугольника проходит через центр описанной около него окружности, то этот треугольник равнобедренный.

101. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку A отложен отрезок $AD = AB$, а за точку C — отрезок $CE = CB$. Найдите углы треугольника DBE , зная углы треугольника ABC .

102. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин A и C , пересекаются в точке M . Найдите $\angle AMC$, если $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 80^\circ$.

103. Если на гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отметить две точки E и D так, что $BE = BA$ и $CD = CA$, то $\angle DAE = 45^\circ$. Докажите.

104. В равнобедренном треугольнике ABC высоты AD и CE , опущенные на боковые стороны, образуют угол AMC , равный 48° . Найдите углы треугольника ABC .

105. Из середины гипотенузы восстановлен перпендикуляр до пересечения с катетом, и полученная точка соединена с концом другого катета отрезком, который делит угол треугольника в отношении $2 : 5$ (меньшая часть — при гипотенузе). Найдите этот угол.

106. Дан угол A . От его вершины A отложим на одной из сторон отрезок AB ; из точки B проведем прямую, параллельную второй стороне данного угла; на этой прямой отложим внутри угла отрезок BD , равный BA , и соединим точку D с вершиной A . Докажите, что прямая AD делит данный угол пополам.

107. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.

108. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC . Найдите угол B треугольника.

109. В треугольнике ABC из вершины C проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов (рис. 5). Первая биссектриса образует со стороной AB угол, равный 40° . Какой угол образует с продолжением стороны AB вторая биссектриса?

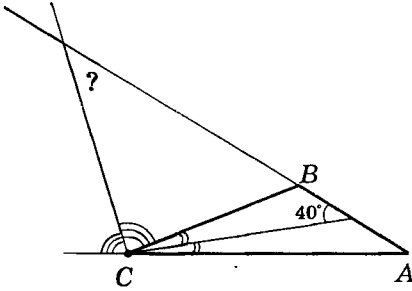


Рис. 5

110. Точки A и D лежат на одной из двух параллельных прямых, точки B и C — на другой, причем прямые AB и CD также параллельны. Докажите, что противоположные углы четырехугольника $ABCD$ равны.

111. Через середину M отрезка с концами на двух параллельных прямых проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках A и B . Докажите, что M также середина AB .

112°. Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите отношение внешних углов треугольника.

113. Докажите, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, вдвое меньше гипотенузы.

114°. Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.

115. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC , причем $\angle ABM = \angle ACB$ и $\angle CBN = \angle BAC$. Докажите, что треугольник BMN равнобедренный.

116. Угол при основании BC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше угла при вершине, BD — бис-

сектриса треугольника. Докажите, что $AD = BC$.

117. Два угла треугольника равны 10° и 70° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины третьего угла треугольника.

118. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° , а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.

119. Прямая, проведенная через вершину C треугольника ABC параллельно его биссектрисе BD , пересекает продолжение стороны AB в точке M . Найдите углы треугольника MBC , если $\angle ABC = 110^\circ$.

120°. Докажите, что геометрическое место точек, удаленных на данное расстояние от данной прямой, есть две параллельные прямые, находящиеся на данном расстоянии от этой прямой.

121. Одна из сторон треугольника вдвое больше другой, а угол между этими сторонами равен 60° . Докажите, что треугольник прямоугольный.

122. Даны два равнобедренных треугольника с общим основанием. Докажите, что их медианы, проведенные к основанию, лежат на одной прямой.

123. Докажите, что если две стороны и угол против меньшей из них одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу против меньшей из них другого треугольника, то треугольники могут быть как равными, так и не равными.

124. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK . Найдите AB , если $BC = 12$.

125. Прямая, проведенная через вершину A треугольника ABC перпендикулярно его медиане BD , делит эту медиану пополам. Найдите отношение сторон AB и AC .

126°. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M на расстояние, равное AM . Найдите расстояние от полученной точки до вершин B и C , если $AB = 4$, $AC = 5$.

127. Две различные окружности пересекаются в точках A и B . Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, делит отрезок AB пополам и перпендикулярна ему.

128°. Разделите отрезок пополам с помощью циркуля и линейки.

129. Докажите, что диагонали четырехугольника с равными сторонами взаимно перпендикулярны.

130. Две высоты треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

131. AD — биссектриса треугольника ABC . Точка M лежит на стороне AB , причем $AM = MD$. Докажите, что $MD \parallel AC$.

132. Точки A и D лежат на одной из двух параллельных прямых, точки B и C — на другой, причем прямые AB и CD также параллельны. Докажите, что $AB = CD$ и $AD = BC$.

133. Некоторая прямая пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B соответственно. Биссектриса одного из образовавшихся углов с вершиной B пересекает прямую a в точке C . Найдите AC , если $AB = 1$.

134. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 6) и делятся ею в отношении $AO : OB = CO : OD = 1 : 2$. Прямые AD и BC пересекаются

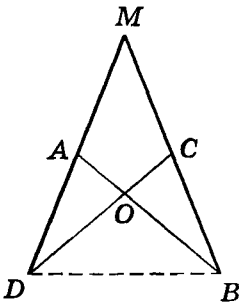


Рис. 6

в точке M . Докажите, что треугольник DMB равнобедренный.

135. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если меди-

ана, проведенная к его гипотенузе, делит прямой угол в отношении $1 : 2$.

136. Известно, что при пересечении прямых a и b третьей прямой образовалось восемь углов. Четыре из этих углов равны 80° , а четыре других равны 100° . Следует ли из этого, что прямые a и b параллельны?

137. Пусть AE и CD — биссектрисы равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Докажите, что $\angle BED = 2\angle AED$.

138. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30° . Докажите, что в этом треугольнике отрезок перпендикуляра, проведенного к гипотенузе через ее середину до пересечения с катетом, вдвое меньше большего катета.

139. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle PXB = \angle QXC$, где X — середина основания BC . Докажите, что $BQ = CP$.

140. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

141. Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

142. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, причем $BC \geq AB$, то эти треугольники равны.

143. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N , причем $MN \parallel AB$ и $MN = AM$. Найдите угол BAN , если $\angle B = 45^\circ$ и $\angle C = 60^\circ$.

144. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M , причем $BM = AB$. Найдите разность углов BAM и CAM , если $\angle ACB = 25^\circ$.

145. BK — биссектриса треугольника ABC . Известно, что $\angle АКВ : \angle СКВ = 4 : 5$. Найдите разность углов A и C треугольника ABC .

146. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию. Верно ли обратное?

147. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$ и $AD \parallel BC$.

148. Один из углов треугольника равен α . Найдите угол между биссектрисами внешних углов, проведенными из вершин двух других углов.

149. Докажите, что биссектрисы равностороннего треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершин треугольника.

150. На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM . Найдите угол DMC .

151. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Докажите, что высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части.

152. Основание H высоты CH прямоугольного треугольника ABC соединили с серединами M и N катетов AC и BC . Докажите, что периметр четырехугольника $CMHN$ равен сумме катетов треугольника ABC .

153. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC расположены точки N и M соответственно, причем $AN = NM = MB = BC$. Найдите углы треугольника ABC .

154. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $AC = 10$. Из точки D , совпадающей с серединой AB , проведен перпендикуляр DE к стороне AB до пересечения со стороной BC в точке E . Периметр треугольника ABC равен 40. Найдите периметр треугольника AEC .

155. Можно ли расположить на плоскости три круга так, что любые два из них имели бы общие точки, а все три — нет?

156. Докажите, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы.

157. Докажите, что радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен медиане, проведенной к большей стороне (к гипотенузе). Верно ли обратное утверждение? (Если радиус описанной около треугольника окружности равен медиане, то треугольник прямоугольный.)

158. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CK из вершины прямого угла C , а в треугольнике ACK — биссектриса CE . Докажите, что $CB = BE$.

159°. Расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Докажите, что расстояние от каждой точки одной из двух параллельных прямых до второй прямой постоянно.

160. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC . Найдите угол B .

161. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC , пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB , если $BM = 8$, $KC = 1$.

162. Треугольники ABC и ABD равны, причём точки C и D не совпадают. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой AB .

163. Треугольники ABC и ADC имеют общую сторону AC ; стороны AD и BC пересекаются в точке M . Углы B и D равны по 40° . Расстояние между вершинами D и B равно стороне AB ; $\angle AMC = 70^\circ$. Найдите углы треугольников ABC и ADC .

164. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ заданы: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

165. На луче OX отложены последовательно точки A и C , а на луче

OY — B и D (рис. 7). При этом $OA = OB$ и $AC = BD$. Прямые AD и BC пересекаются в точке E . Докажите, что луч OE — биссектриса угла XOY .

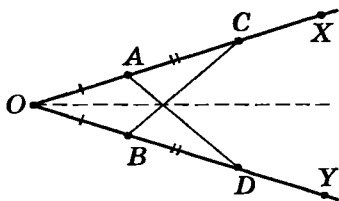


Рис. 7

166. В треугольнике с неравными сторонами AB и AC проведены высота AH и биссектриса AD . Докажите, что угол HAD равен полуразности углов B и C .

167. В треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M . Известно, что $MB_1 = MC_1$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

168. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M , биссектрисы B_1B_2 и C_1C_2 треугольника AB_1C_1 пересекаются в точке N . Докажите, что точки A , M и N лежат на одной прямой.

169. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведенные из вершин A и B , пересекаются в точке H , причем $\angle AHB = 120^\circ$, а биссектрисы, проведенные из вершин B и C , — в точке K , причем $\angle BKC = 130^\circ$. Найдите угол ABC .

170. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной из вершины прямого угла.

171. AD — биссектриса треугольника ABC , E — основание перпендикуляра, опущенного из центра O вписанной окружности на сторону BC . Докажите, что $\angle BOE = \angle COD$.

172. На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B соответственно взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MCK .

173. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MCK .

174°. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные прямые под равными углами.

175. Дана незамкнутая ломаная $ABCD$, причем $AB = CD$ и $\angle ABC = \angle BCD$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

176. На сторонах AC и BC равностороннего треугольника ABC построены внешним образом равнобедренные прямоугольные треугольники ACN и BCM с прямыми углами при вершинах A и C соответственно. Докажите, что $BM \perp BN$.

177. Докажите, что биссектрисы двух внешних углов и третьего внутреннего угла треугольника пересекаются в одной точке.

178. Найдите сумму внутренних углов:

- а) четырехугольника;
- б) выпуклого пятиугольника;
- в) выпуклого n -угольника.

179. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O . Через точку O проходят две прямые, которые параллельны прямым AB и AC и пересекаются с BC в точках D и E . Докажите, что периметр треугольника OED равен отрезку BC .

180. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $AL : LC = 3 : 1$. Докажите, что угол KLD — прямой.

181. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC одинаково наклонены к сторонам BC и AC . Найдите зависимость между углами A и B .

182. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и сумме катетов.

183. Существует ли треугольник, две биссектрисы которого перпендикулярны?

184. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108° .

Перпендикуляр к биссектрисе AD этого треугольника, проходящий через точку D , пересекает сторону AC в точке E . Докажите, что $DE = BD$.

185. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке K . Известно, что $AC \parallel BD$. Докажите, что треугольники AKC и BKD равнобедренные.

186. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен 15° . Найдите гипотенузу.

187. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярны сторонам исходного треугольника (рис. 8). В каком отношении каждая из взятых точек делит сторону исходного треугольника?

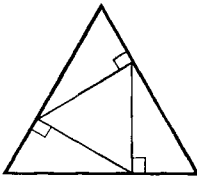


Рис. 8

188. Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что угол между биссектрисой, проведенной к основанию, и биссектрисой, проведенной к боковой стороне, равен углу при вершине.

189. Отрезок постоянной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла. По какой траектории движется середина этого отрезка?

190. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, исходящим из одной вершины.

191. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

192. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и

DCL . Докажите, что треугольник AKL — правильный.

193. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника вне его построены квадраты $ACDE$ и $BCKF$. Из точек E и F на продолжение гипотенузы опущены перпендикуляры EM и FN . Докажите, что $EM + FN = AB$.

194. Найдите сумму углов при вершинах самопересекающейся пятиконечной звезды.

195. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

196. Докажите признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

197. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD , а периметр треугольника ACD — периметру треугольника BCD . Докажите, что $AO = BO$.

198. Точки M и N — середины равных сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P . Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P .

199. Докажите, что две различные окружности на могут иметь более трех общих точек.

200. В треугольнике ABC угол A равен 60° , а биссектриса угла A , медиана, проведенная из вершины B , и высота, проведенная из вершины C , пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.

201. В треугольнике ABC сторона AB равна 2, а углы A и B равны соответственно 60° и 70° . На стороне AC взята точка D так, что $AD = 1$. Найдите углы треугольника BDC .

202. Найдите сумму внешних углов выпуклого n -угольника.

203. Продолжения двух противоположных сторон AB и CD четырех-

угольника $ABCD$ пересекаются под углом α , продолжения двух других противоположных сторон пересекаются под тем же углом. Докажите, что два угла в четырехугольнике равны, и найдите разность двух других его углов.

204. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что $AO \perp B_1C_1$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

205. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противоположную сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.

206. Величины углов A, B, C треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{7}$.

Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке D . Точки A_1, B_1, C_1 находятся на продолжениях отрезков DA, DB, DC за точки A, B, C соответственно на одинаковом расстоянии от точки D . Докажите, что величины углов A_1, B_1, C_1 также образуют арифметическую прогрессию. Найдите ее разность.

207. Прямая пересекает боковую сторону AC , основание BC и продолжение боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC в точках K, L и M соответственно. При этом треугольники CKL и BML также равнобедренные. Найдите их углы.

208. Биссектриса внутреннего угла при вершине A и биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите $\angle BMC$, если $\angle BAC = 40^\circ$.

209. Возможно ли, чтобы одна биссектриса треугольника делила пополам другую биссектрису?

210. Сторона AD прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB .

Точки M и N делят AD на три равные части (рис. 9). Найдите $\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB$.

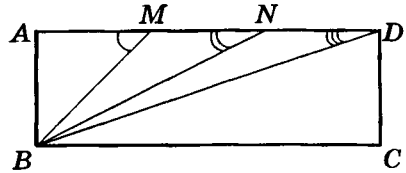


Рис. 9

211. Найдите углы треугольника, если известно, что медиана и высота, выходящие из вершины одного из его углов, делят этот угол на три равные части.

212. Дан равнобедренный треугольник ABC с вершиной A . Длина прыжка кузнечика равна основанию BC . Известно, что, начиная движение из точки C , кузнечик за 23 прыжка оказался в точке A , приземляясь после каждого прыжка на боковой стороне треугольника ABC и чередуя стороны при каждом прыжке, кроме последнего. Найдите углы треугольника ABC , если известно, что с каждым прыжком кузнечик приближался к точке A .

213. Какие значения может принимать: а) наибольший угол треугольника; б) наименьший угол треугольника; в) средний по величине угол треугольника?

214. В треугольнике ABC угол B равен 20° , угол C равен 40° . Биссектриса AD равна 2. Найдите разность сторон $BC - AB$.

215. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $\angle MAB = 60^\circ$, $\angle MCD = 15^\circ$. Найдите $\angle MBC$.

216. На стороне BC равностороннего треугольника ABC взята точка M , а на продолжении стороны AC за точку C — точка N , причем $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

217°. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в

точке E , $AB = AD$, CA — биссектриса угла C , $\angle BAD = 140^\circ$, $\angle BEA = 110^\circ$. Найдите угол CDB .

218°. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE .

219°. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P так, что $\angle PBA = \angle PAB = 15^\circ$. Докажите, что CPD — равносторонний треугольник.

220. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

221. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.

222. В треугольнике ABC известны углы $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 15^\circ$. На продолжении стороны AC за точку C взята точка M так, что $CM = 2AC$. Найдите $\angle AMB$.

223. Дан треугольник ABC , причем $AB = AC$ и $\angle A = 80^\circ$. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle MBC = 30^\circ$, а $\angle MCB = 10^\circ$. Найдите $\angle AMC$.

224. Дан треугольник ABC , причем $AB = AC$ и $\angle A = 110^\circ$. Внутри треугольника взята точка M такая, что $\angle MBC = 30^\circ$, а $\angle MCB = 25^\circ$. Найдите $\angle AMC$.

225. Докажите, что если в треугольнике один угол равен 120° , то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

226. На сторонах AB , BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$ и $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1 , B_1 и C_1 явля-

ются основаниями высот треугольника ABC .

227. В треугольнике ABC угол B равен 36° , угол C равен 42° . На стороне BC взята точка M так, что $BM = R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC . Найдите угол MAC .

3. ОКРУЖНОСТЬ. ДИАМЕТР, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЙ ХОРДЕ. ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЕ СВОЙСТВО ОКРУЖНОСТИ. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ. КАСАЮЩИЕСЯ ОКРУЖНОСТИ. ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

228. Докажите, что диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

229. Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны.

230. Через точку M проведены две касательные MA и MB к окружности (A и B — точки касания). Докажите, что $MA = MB$.

231. Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

232. Докажите, что около четырехугольника, сумма противоположных углов которого равна 180° , можно описать окружность.

233. Из точки, данной на окружности, проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

234. Из точки, данной на окружности, проведены две хорды, каждая из которых равна радиусу. Найдите угол между ними.

235. Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60° . Найдите хорду AB , если радиус окружности равен R .