

точке E , $AB = AD$, CA — биссектриса угла C , $\angle BAD = 140^\circ$, $\angle BEA = 110^\circ$. Найдите угол CDB .

218°. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE .

219°. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P так, что $\angle PBA = \angle PAB = 15^\circ$. Докажите, что CPD — равносторонний треугольник.

220. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

221. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.

222. В треугольнике ABC известны углы $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 15^\circ$. На продолжении стороны AC за точку C взята точка M так, что $CM = 2AC$. Найдите $\angle AMB$.

223. Дан треугольник ABC , причем $AB = AC$ и $\angle A = 80^\circ$. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle MBC = 30^\circ$, а $\angle MCB = 10^\circ$. Найдите $\angle AMC$.

224. Дан треугольник ABC , причем $AB = AC$ и $\angle A = 110^\circ$. Внутри треугольника взята точка M такая, что $\angle MBC = 30^\circ$, а $\angle MCB = 25^\circ$. Найдите $\angle AMC$.

225. Докажите, что если в треугольнике один угол равен 120° , то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

226. На сторонах AB , BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$ и $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1 , B_1 и C_1 явля-

ются основаниями высот треугольника ABC .

227. В треугольнике ABC угол B равен 36° , угол C равен 42° . На стороне BC взята точка M так, что $BM = R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC . Найдите угол MAC .

3. ОКРУЖНОСТЬ. ДИАМЕТР, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЙ ХОРДЕ. ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЕ СВОЙСТВО ОКРУЖНОСТИ. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ. КАСАЮЩИЕСЯ ОКРУЖНОСТИ. ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

228. Докажите, что диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

229. Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны.

230. Через точку M проведены две касательные MA и MB к окружности (A и B — точки касания). Докажите, что $MA = MB$.

231. Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

232. Докажите, что около четырехугольника, сумма противоположных углов которого равна 180° , можно описать окружность.

233. Из точки, данной на окружности, проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

234. Из точки, данной на окружности, проведены две хорды, каждая из которых равна радиусу. Найдите угол между ними.

235. Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60° . Найдите хорду AB , если радиус окружности равен R .

236°. Постройте окружность, которая проходила бы через две данные точки и центр которой находился бы на данной прямой.

237. Из внешней точки проведены к кругу две взаимно перпендикулярные касательные (рис. 10). Радиус круга $R = 10$. Найдите длину каждой касательной.

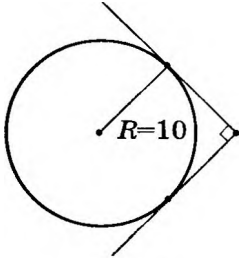


Рис. 10

238. Дан сектор, равный четверти круга радиуса R . Найдите длину касательной, проведенной в середине его дуги до пересечения с продолжениями крайних радиусов сектора.

239. AB и AC — касательные к одной окружности, $\angle BAC = 60^\circ$, длина ломаной BAC равна 1. Найдите расстояние между точками касания B и C .

240. Хорда стягивает дугу в 90° и равна 16. Найдите до нее расстояние от центра окружности.

241. Радиусы двух концентрических окружностей относятся, как $7 : 4$, а ширина кольца равна 12. Найдите радиус меньшей окружности.

242. Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.

243. Хорда пересекает диаметр под углом 30° и делит его на два отрезка длинами 2 и 6. Найдите расстояние от центра окружности до этой хорды.

244°. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен r , а полупериметр — p . Найдите гипотенузу.

245. Три последовательные стороны описанного четырехугольника относятся, как $1 : 2 : 3$. Найдите его стороны, если известно, что периметр равен 24.

246. Докажите, что равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

247. Докажите, что хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.

248. Постройте окружность данного радиуса, высекающую на данной прямой отрезок, равный данному.

249. Через точку A окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC . Докажите, что угол BAC вдвое меньше угла BOC .

250. Угол с вершиной C равен 120° . Окружность радиуса R касается сторон угла в точках A и B . Найдите AB .

251. Точки A и B лежат на окружности. Касательные к окружности, проведенные через эти точки, пересекаются в точке C . Найдите углы треугольника ABC , если $AB = AC$.

252. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и AC в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Известно, что $AC_1 = BA_1 = CB_1$. Докажите, что треугольник ABC — правильный.

253. В прямой угол вписан круг. Хорда, соединяющая точки касания, равна 2. Найдите расстояние от центра круга до этой хорды.

254. Даны два круга радиусами R и r ($R > r$), один вне другого. К ним проведены две общие внешние касательные. Найдите их длину (между точками касания), если их продолжения образуют прямой угол.

255. Две прямые проходят через точку M и касаются окружности в точках A и B . Проведя радиус OB , продолжат его за точку B на расстояние $BC = OB$. Докажите, что $\angle AMC = \angle BMC$.

256. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите радиус описанной окружности.

257. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, угол при вершине равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности.

258. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания вписанного круга в отношении $7 : 5$ (начиная от вершины). Найдите отношение боковой стороны к основанию.

259. Укажите все точки M внутри круга, через которые можно провести две различные хорды, делящиеся в точке M пополам.

260. Докажите, что если пересечь два концентрических круга секущей, то части секущей, лежащие между окружностями, равны между собой.

261. Через точку A , лежащую на окружности, проведены диаметр AB и хорда AC , причем $AC = 8$ и $\angle BAC = 30^\circ$. Найдите хорду CM , перпендикулярную AB .

262. Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.

263. В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой хордой на два отрезка в 3 и 7. Найдите расстояние от центра окружности до каждой хорды.

264. В круге с центром O проведена хорда AB и продолжена на расстояние BC , равное радиусу (рис. 11). Через точку C и центр O проведена секущая

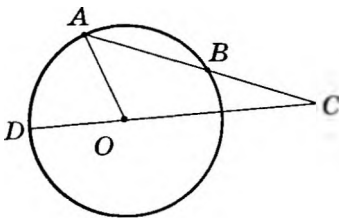


Рис. 11

CD (D — точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что угол AOD равен утроенному углу ACD .

265. Докажите, что середины всех хорд данной длины, проведенных в данной окружности, лежат на некоторой окружности.

266. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

267. Три равных круга радиуса R касаются друг друга внешним образом. Найдите стороны и углы треугольника, вершинами которого служат точки касания.

268. Два равных круга касаются изнутри третьего круга и касаются между собой. Соединив три центра, получим треугольник с периметром, равным 18. Найдите радиус большего круга.

269. Около круга, радиус которого равен 4, описан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 26. Найдите периметр треугольника.

270. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите углы треугольника.

271. Расстояние от точки M до центра O окружности равно диаметру этой окружности. Через точку M проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B . Найдите углы треугольника AOB .

272. В круге на расстоянии 1 от центра даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них равна 6. На какие части одна хорда делит другую?

273. В круге радиуса R даны два взаимно перпендикулярных диаметра. Произвольная точка окружности спроецирована на эти диаметры. Найдите расстояние между проекциями точки.

274. Сторона ромба равна 8, острый угол равен 30° . Найдите радиус вписанного круга.

275. Две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O . Найдите периметр треугольника OO_1O_2 .

276. Центры трех попарно касающихся друг друга внешним образом окружностей расположены в точках A, B, C , $\angle ABC = 90^\circ$. Точки касания — K, P и M (P на стороне AC). Найдите угол KPM .

277. Разделите окружность с данным центром на 6 равных частей, пользуясь только циркулем.

278. Найдите угол между радиусами OA и OB , если расстояние от центра O окружности до хорды AB : а) вдвое меньше AB ; б) вдвое меньше OA .

279. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите CK , если $AC = 2$ и $\angle A = 30^\circ$.

280. Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.

281. Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

282. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

283. Окружности, центры которых расположены по разные стороны от некоторой прямой, касаются этой прямой. Линия центров пересекает прямую под углом, равным 30° . Найдите расстояние между центрами окружностей, если их радиусы равны r и R .

284. Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C . Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40^\circ$.

285. Две прямые, пересекающиеся в точке C , касаются окружности с центром O в точках A и B . Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$. Докажите, что сумма отрезков AC и BC равна отрезку OC .

286. Прямая, параллельная хорде AB , касается окружности в точке C . Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

287. Точка A лежит вне данной окружности с центром O . Окружность с диаметром OA пересекается с данной в точках B и C . Докажите, что прямые AB и AC — касательные к данной окружности.

288. Прямая касается окружности с центром O в точке A . Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по разные стороны от прямой OA . Найдите угол CAD , если угол AOD равен 110° .

289. Прямая касается окружности с центром O в точке A . Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по одну сторону от прямой OA (рис. 12). Докажите, что угол CAD вдвое меньше угла AOD .

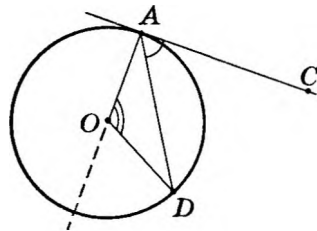


Рис. 12

290. Диагонали четырехугольника делят его углы пополам. Докажите, что в такой четырехугольник можно вписать окружность.

291. Радиусы двух кругов равны 2 и 4. Их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Найдите длины каждой из них.

292. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром вписанной окружности. Найдите углы треугольника.

293. Центральный угол сектора равен 60° , а радиус равен R . Найдите радиус круга, вписанного в этот сектор.

294. В острый угол, равный 60° , вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r . Найдите радиус большей окружности.

295. Даны два круга — один внутри другого. Через их центры проведен в большем круге диаметр, который окружностью меньшего круга делится на три части: 5, 8 и 1. Найдите расстояния между центрами кругов.

296. Из конца A диаметра AC окружности опущен перпендикуляр AP на касательную, проведенную через лежащую на окружности точку B , отличную от A и C . Докажите, что AB — биссектриса угла PAC .

297. Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

298. Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.

299. Окружность касается одной стороны прямого угла с вершиной O и пересекает вторую сторону в точках A и B . Найдите радиус окружности, если $OA = a$ и $OB = b$.

300. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O . Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

301. В данный круг, радиус которого равен 3, вписано шесть равных кру-

гов, из которых каждый касается данного круга; кроме того, каждый из этих шести кругов касается двух соседних. Найдите радиусы кругов.

302. Шесть равных кругов касаются внешним образом круга радиуса 1 и, кроме того, каждый из этих шести кругов касается двух соседних. Найдите радиусы кругов.

303. Стороны треугольника относятся, как $5 : 4 : 3$. Найдите отношения отрезков сторон, на которые они делятся точками касания с вписанной окружностью.

304. Даны две концентрические окружности радиусов 1 и 3 с общим центром O . Третья окружность касается их обеих. Найдите угол между касательными к третьей окружности, выходящими из точки O .

305. Через центр окружности, вписанной в трапецию, проведена прямая, параллельная основаниям. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, равен четверти периметра трапеции.

306. На отрезке AB как на диаметре построена окружность. Докажите, что из всех точек окружности, отличных от A и B , отрезок AB виден под прямым углом.

307. Равные хорды окружности с центром O пересекаются в точке M . Докажите, что MO — биссектриса угла между ними.

308. Через концы диаметра окружности проведены две хорды, пересекающиеся на окружности и равные 12 и 16. Найдите расстояния от центра окружности до этих хорд.

309°. Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P . Докажите, что треугольники APD и BPC — равнобедренные.

310°. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую

BC в точках P и Q (рис. 13). Докажите, что окружность, построенная на отрезке PQ как на диаметре, проходит через точку A .

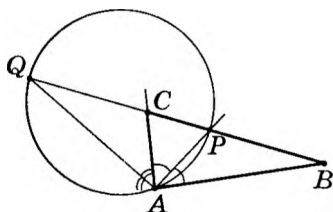


Рис. 13

311. Докажите, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах, лежит на прямой BC .

312°. Из точки M , лежащей вне двух concentрических окружностей, проведены четыре прямые, касающиеся окружностей в точках A, B, C и D . Докажите, что точки M, A, B, C, D расположены на одной окружности.

313°. Две прямые, проходящие через точку M , лежащую вне окружности с центром O , касаются окружности в точках A и B . Отрезок OM делится окружностью пополам. В каком отношении отрезок OM делится прямой AB ?

314. Окружность проходит через вершину C и середины D и E сторон BC и AC равностороннего треугольника ABC . Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и BC , — касательная к окружности.

315. Хорда, перпендикулярная диаметру окружности, делит его в отношении $1:3$. Под какими углами видна хорда из концов этого диаметра?

316. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, высекает на двух других сторонах равные отрезки. Докажите, что треугольник равнобедренный.

317. Даны две равные касающиеся окружности. Под каким углом пересе-

каются прямые, одна из которых касается этих окружностей в разных точках, а вторая проходит через центр одной из окружностей и касается другой?

318. Через данную в круге точку проведите хорду, которая делилась бы этой точкой пополам.

319. В данном круге проведены две равные параллельные хорды, расстояние между которыми равно радиусу данного круга. Найдите острый угол между прямыми, соединяющими концы хорд.

320. Даны две круга. Их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Хорды, соединяющие точки касания, равны 3 и 5. Найдите расстояние между центрами кругов.

321. Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c . Докажите, что $r = \frac{a+b-c}{2}$.

322. Пусть r — радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов прямоугольного треугольника со сторонами a, b, c . Докажите, что $r = \frac{a+b+c}{2}$.

323. В треугольник ABC вписана окружность. Пусть x — расстояние от вершины A до ближайшей точки касания, $BC = a$. Докажите, что $x = p - a$, где p — полупериметр треугольника.

324. Через точку касания двух окружностей проведена секущая. Докажите, что радиусы и касательные, проведенные через концы образовавшихся хорд, попарно параллельны.

325. На сторонах OA и OB четверти AOB круга построены как на диаметрах полуокружности ACO и OCB , пересекающиеся в точке C . Докажите, что:

- 1) прямая OC делит $\angle AOB$ пополам;
- 2) точки A, C и B лежат на одной прямой;
- 3) дуги AC, CO и CB равны между собой.

326. В шестиугольнике, описанном около окружности, даны пять последовательных сторон: a, b, c, d, e . Найдите шестую сторону.

327. Стороны треугольника ABC касаются некоторой окружности в точках K, P и M , причем точка M расположена на стороне BC . Найдите угол KMP , если $\angle BAC = 2\alpha$.

328. AB — диаметр окружности, AC и BD — параллельные хорды этой окружности. Докажите, что $AC = BD$ и CD также диаметр окружности.

329. Докажите, что прямая, проходящая через центры вневписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон AB и AC , перпендикулярна прямой, проходящей через центр вписанной окружности и вершину A .

330. Две окружности пересекаются в точках A и B ; AM и AN — диаметры окружностей. Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

331. Найдите центр данной окружности с помощью чертежного угольника.

332. BM и CN — высоты треугольника ABC . Докажите, что точки B, N, M и C лежат на одной окружности.

333. Окружность, построенная на биссектрисе AD треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках M и N , отличных от A . Докажите, что $AM = AN$.

334. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружность с диаметром AB в точке K , отличной от A , а окружность с центром B — в точках M и N . Докажите, что $MK = KN$.

335. Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC , точки B и C , а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами B и C лежат на одной окружности.

336. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности,

причем центр O окружности расположен внутри четырехугольника $ABCD$ (рис. 14). Точки K, L, M и N — середины отрезков AB, BC, CD и AD соответственно. Докажите, что

$$\angle KON + \angle MOL = 180^\circ.$$

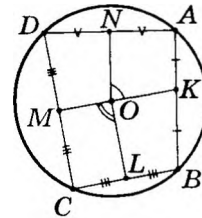


Рис. 14

337. Угол при вершине A треугольника ABC равен 120° . Окружность касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Докажите, что расстояние от вершины A до центра окружности равно периметру треугольника ABC .

338. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC . В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что треугольник O_1DO_2 прямоугольный.

339. В прямой угол вписана окружность радиуса R , касающаяся сторон угла в точках A и B . Через некоторую точку на меньшей дуге AB окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.

340. Постройте прямую, касающуюся данной окружности в данной точке, не используя центр окружности.

341. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M и продолжений двух других сторон. Докажите, что прямая AM делит периметр треугольника пополам.

342. Окружность с центром O касается в точке A внутренним образом большей окружности. Из точки B

большей окружности, диаметрально противоположной точке A , проведена хорда BC большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке M . Докажите, что $OM \parallel AC$.

343. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом, а также касаются некоторой прямой соответственно в точках A и B . На продолжении за точку A радиуса O_1A меньшей окружности отложен отрезок AK , равный O_2B . Докажите, что O_2K — биссектриса угла O_1O_2B .

344. Окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC . Докажите, что расстояние от вершины A до точки касания с прямой AB равно половине периметра треугольника ABC .

345. В прямоугольном треугольнике на гипотенузе AB от вершины A отложим отрезок AD , равный катету AC , а от вершины B — отрезок BE , равный катету BC . Докажите, что отрезок DE равен диаметру окружности, вписанной в треугольник ABC .

346. Две окружности радиусов r и ρ ($r < \rho$) касаются внешним образом, а также обе касаются внутренним образом окружности радиуса R . Известно, что треугольник с вершинами в центрах окружностей является равнобедренным, а угол между боковыми сторонами больше $\frac{\pi}{3}$. Найдите основание этого треугольника.

347. Наибольший угол треугольника равен 100° . Построены три попарно касающиеся внешним образом окружности с центрами в вершинах этого треугольника. Найдите наименьший угол треугольника с вершинами в точках касания построенных окружностей.

348. В равнобедренный треугольник с основанием 12 вписана окружность и к ней проведены три касатель-

ные так, что они отсекают от данного треугольника три маленьких треугольника. Сумма периметров отсеченных треугольников равна 48. Найдите боковую сторону данного треугольника.

349. Прямые PA и PB касаются окружности с центром O (A и B — точки касания). Проведена третья касательная к окружности, пересекающая прямые PA и PB в точках X и Y . Докажите, что величина угла XOY не зависит от выбора третьей касательной.

350. Дан круг радиуса 1. Из внешней точки M к нему проведены две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB . Между точками касания A и B на дуге AB взята произвольная точка C и через нее проведена третья касательная KL , образующая с касательными MA и MB треугольник KLM . Найдите периметр этого треугольника.

351. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a . Докажите, что точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности, и найдите ее радиус.

352. Каково взаимное расположение двух окружностей, если:

а) расстояние между центрами равно 10, а радиусы равны 8 и 2?

б) расстояние между центрами равно 4, а радиусы равны 11 и 17?

в) расстояние между центрами равно 12, а радиусы равны 5 и 3?

353. Окружность, построенная на основании BC трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины диагоналей AC и BD трапеции и касается основания AD . Найдите углы трапеции.

354. Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, пересекает вторично эти окружности в точках B и C соответственно. Расстояние между проекциями центров окруж-

ностей на эту прямую равно 12. Найдите BC , если известно, что точка A лежит на отрезке BC .

355. Найдите геометрическое место точек M , из которых данный отрезок AB виден под прямым углом (т. е. $\angle AMN = 90^\circ$).

356. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении $1 : 3$. Найдите острые углы треугольника.

357. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . Окружность, вписанная в треугольник ACD , касается отрезка в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC .

358. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , BC и AC соответственно в точках K , M и N . Найдите угол KMN , если $\angle A = 70^\circ$.

359. Две окружности касаются друг друга внутренним образом. Известно, что два радиуса большей окружности, угол между которыми равен 60° , касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

360. Одна вершина правильного треугольника лежит на окружности, а две другие делят некоторую хорду на три равные части. Под каким углом видна хорда из центра окружности?

361. Пусть O_1 , O_2 и O_3 — центры вневписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон BC , AC и AB соответственно. Докажите, что точки A , B и C — основания высот треугольника $O_1O_2O_3$.

362. Докажите, что сторона BC треугольника ABC видна из центра O вписанной окружности под углом $90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$, а из центра O_1 вневписанной окружности, касающейся стороны BC , — под углом $90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.

363. Окружность касается двух сторон треугольника и двух его медиан (рис. 15). Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

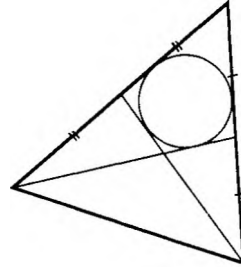


Рис. 15

364°. Проведите через данную точку касательную к данной окружности.

365°. Окружность высекает на сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

366°. Треугольник ABC — равнобедренный; A_1 , B_1 , C_1 — середины сторон BC , AC , AB соответственно. Докажите, что прямая A_1C_1 касается окружности, проходящей через точки A_1 , B_1 , C .

367. Две окружности касаются внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная. На отрезке этой касательной, заключенном между точками касания, как на диаметре построена окружность. Докажите, что она касается линии центров первых двух окружностей.

368. В вершинах A , B , C и D четырехугольника $ABCD$ находятся центры четырех окружностей. Любые две окружности, центры которых расположены в соседних вершинах, касаются друг друга внешним образом. Известны три стороны четырехугольника: $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 5$. Найдите сторону AD .

369. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник со стороной, равной a , проведена касательная,

пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

370. К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной a , проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

371. Докажите, что прямая, проходящая через некоторую точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному в этой точке, имеет единственную общую точку с окружностью, т. е. является касательной к окружности.

372. На листе бумаги вырезана круглая дырка. Через данную точку плоскости проведите касательную к окружности, ограничивающую эту дырку. (Запрещаются любые построения внутри дырки.)

373. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную заданному отрезку.

374. Окружность вписана в треугольник со сторонами, равными a , b и c . Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a .

375°. Прямая, проходящая через центры двух окружностей, называется их линией центров. Докажите, что общие внешние (внутренние) касательные к двум окружностям пересекаются на линии центров этих окружностей.

376. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекает их общую касательную, проходящую через точку K , в точке M . Докажите, что $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90^\circ$.

377. Хорда окружности пересекает некоторый диаметр под углом, равным 30° , и делит его на отрезки, равные a и b . Найдите расстояние от центра окружности до этой хорды.

378. Хорда окружности пересекает некоторый диаметр под углом, рав-

ным 45° , и делится им на отрезки, равные a и b . Найдите расстояние от центра окружности до этой хорды.

379. Окружность с центром O вписана в треугольник ABC . Через точки пересечения окружности с отрезками AO , BO и CO проведены к ней касательные. Найдите углы треугольника, образованного этими касательными, если углы треугольника ABC равны α , β и γ .

380. Прямая касается двух окружностей в точках A и B . Линия центров пересекает первую окружность в точках E и C , а вторую — в точках D и F . Докажите, что AC либо параллельна, либо перпендикулярна BD .

381. Докажите, что если существуют окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырехугольника взаимно перпендикулярны.

382. В данную окружность впишите прямоугольный треугольник, катеты которого проходят через две данные точки внутри окружности.

383. Прямые, делящие один угол треугольника на три равные части, делят сам треугольник на три равнобедренных треугольника. Найдите углы данного треугольника.

384. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно (рис. 16). Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 .

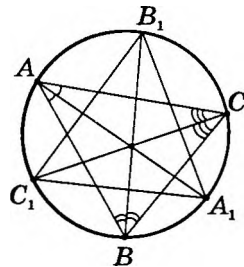


Рис. 16

385°. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1, BB_1, CC_1 .

386°. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC взята точка M так, что $AM = a, MC = b$. В треугольнике ABM и CBM вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BM .

387. В треугольник ABC со сторонами $AB = 5, BC = 7, CA = 10$ вписана окружность. Прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и K , касается этой окружности. Найдите периметр треугольника MVK .

388. Докажите, что если через точку M внутри круга можно провести три различные хорды, делящиеся точкой M в равном отношении, то M — центр круга.

389. Найдите внутри треугольника ABC такую точку P , чтобы общие хорды каждой пары окружностей, построенных на отрезках PA, PB и PC как на диаметрах, были равны.

390. Постройте прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную на ней точку, проведя не более трех линий.

391. Даны прямая и точка вне ее. Постройте прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную точку, проведя не более трех линий циркулем и линейкой.

392°. Окружность вписана в пятиугольник со сторонами, равными a, b, c, d и e . Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a .

393. В треугольник вписана окружность. Три касательные к этой окружности отсекают три треугольника, сумма периметров которых равна a . Найдите периметр данного треугольника.

394. CH — высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная из

вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACH, BCH и ABC , равна CH .

395. CD — медиана треугольника ABC . Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD , касаются отрезка CD в точках M и N . Найдите MN , если $AC - BC = 2$.

396. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка D , причем $BD - AD = 4$. Найдите расстояние между точками, в которых окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD , касаются отрезка CD .

397. Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, делится точкой касания в отношении $1 : 3$. Под каким углом секущая пересекает каждую из параллельных прямых?

398. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC , а вторая касается прямых AB и AC и первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

399. Каждая из трех прямых, параллельных сторонам и проходящих через центр вписанной окружности треугольника, отсекает от него некоторый треугольник. Докажите, что сумма периметров отсеченных треугольников вдвое больше периметра исходного треугольника.

400. Пусть p — полупериметр треугольника, a — длина наибольшей стороны, r — радиус вписанной окружности. Докажите, что треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли $p - a$ меньше, равно или больше r .

401. Через точку пересечения двух окружностей проведите секущую так, чтобы часть ее, заключенная внутри окружностей, имела данную длину.

402. В треугольник со сторонами $6, 10$ и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что

она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

403. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC . Найдите углы трапеции.

404. Центр описанной окружности треугольника симметричен его центру вписанной окружности относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

405. Через данную точку окружности проведите хорду, которая бы делилась данной хордой пополам.

406. Даны окружность и две неравные параллельные хорды. Используя только линейку, разделите эти хорды пополам.

407. Постройте центр данной окружности с помощью двусторонней линейки, если известно, что ширина линейки меньше диаметра окружности.

408. Четырехугольник $ABCD$ обладает тем свойством, что существует окружность, вписанная в угол BAD и касающаяся продолжений сторон BC и CD . Докажите, что $AB + BC = AD + DC$.

409. Докажите, что дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

410. На сторонах четырехугольника как на диаметрах построены четыре окружности (рис. 17). Докажите, что общая хорда окружностей, построен-

ных на двух соседних сторонах, параллельна общей хорде двух других окружностей либо эти хорды лежат на одной прямой.

411. Две окружности касаются внешним (внутренним) образом. Докажите, что сумма (разность) их радиусов равна расстоянию между центрами. Верно ли обратное?

412. Докажите, что отрезок общей внешней касательной к двум окружностям, заключенный между общими внутренними касательными, равен отрезку общей внутренней касательной.

413°. В четырехугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN , NP , PQ , а другая — сторон MN , MQ , PQ . Точки B и A лежат соответственно на сторонах MN и PQ , причем отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите длину стороны MQ , если $NP = b$ и периметр четырехугольника $BAQM$ больше периметра четырехугольника $ABNP$ на величину $2p$.

414. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M , а продолжения сторон AB и AC — в точках N и P соответственно. Вписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке K , а стороны AB — в точке L . Докажите, что: а) отрезок AN равен полупериметру треугольника ABC ; б) $BK = CM$; в) $NL = BC$.

415. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точка касания окружностей). Докажите, что линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания.

416. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 , причем $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что A_1 , B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

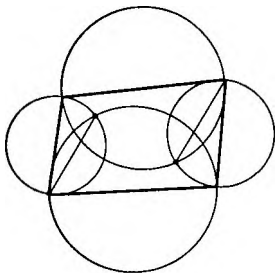


Рис. 17

417. Докажите, что катет прямоугольного треугольника равен сумме радиуса вписанной окружности и радиуса невписанной окружности, касающейся этого катета.

418. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке M . Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABM и ACM , касаются отрезка AM в одной точке.

419. Даны окружность, ее центр O и две точки A и B , не лежащие на окружности. Пользуясь только циркулем, постройте точки пересечения окружности с прямой AB .

420. Докажите, что две окружности касаются тогда и только тогда, когда они касаются некоторой прямой в одной и той же точке.

421. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках A , B и C . Докажите, что касательные к этим окружностям в точках A , B и C пересекаются в одной точке.

422. Докажите, что основания высот, середины сторон и середины отрезков от ортоцентра до вершин треугольника лежат на одной окружности (окружность девяти точек).

423. К двум окружностям различного радиуса проведены общие внешние касательные AB и CD . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда окружности касаются.

424. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник заданного периметра.

425. Докажите, что в четырехугольнике, суммы противоположных сторон которого равны между собой, можно вписать окружность.

426. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ нет параллельных сторон. Обозначим через E и F точки пересечения прямых AB и BC , BC и AD соответственно (точка A лежит на отрезке BE , а точка C — на отрезке BF).

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда $ED + BF = DF + BE$.

4. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ. ТРАПЕЦИЯ. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТРАПЕЦИИ. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

427. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершин треугольника.

428. Докажите, что прямая, содержащая среднюю линию треугольника, параллельна стороне треугольника, а средняя линия треугольника равна половине этой стороны.

429. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

430. Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

431. Сторона параллелограмма втрое больше другой его стороны. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 24.

432. Один из углов параллелограмма на 50° меньше другого. Найдите углы параллелограмма.

433. $ABCD$ — данный прямоугольник; M — середина стороны BC . Дано, что прямые MA и MD взаимно перпендикулярны и что периметр прямоугольника $ABCD$ равен 24. Найдите его стороны.

434. Периметр треугольника равен 28, середины сторон соединены отрезками (рис. 18). Найдите периметр полученного треугольника.

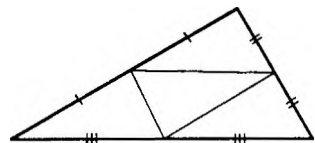


Рис. 18